Matematika 2 – java e dhjetë

Seminaret

1. Vërtetoni formulën e binomit:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \text{ për çdo } n \in \mathbb{N} \text{ dhe për çdo } a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Zgjidhni ekuacionet:

(a) $3\binom{x}{6} = 4\binom{x-1}{5}$

(b) $\frac{1}{\binom{4}{x}} - \frac{1}{\binom{5}{x}} = \frac{1}{\binom{6}{x}}$

(c) $35\binom{2n}{n-1} = 132\binom{2(n-1)}{n}$.

3. Zgjidhni ekuacionet:

(a) $\binom{x}{x-2} + 2\binom{x-1}{3} = 7(x-1)$

(b) $\binom{x+3}{x+1} - 5\binom{3x}{2} = 6 - 19x^2$

(c) $\binom{x+3}{x+1} = \binom{x+1}{x-1} + \binom{x}{x-2}$.

4. Të gjendet numri natyror n ashtu që tek zbërthimi i binomit $(1+x)^n$, koeficientët që shumëzojnë x^5 dhe x^{12} të jenë të barabartë mes tyre.

5. Tek zbërthimi i binomit $(a^3+b^3)^n$, koeficienti i anëtarit të tretë është i barabartë me 28. Të gjendet anëtari i mesëm i zbërthimit.

Zgjidhjet

1. Shënojmë:

$$E = \{n \in \mathbb{N} | (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ për çdo } a, b \in \mathbb{R}\}$$

$1 \in E \Leftrightarrow (a+b)^1 = \binom{1}{0}a^{1-0}b^0 + \binom{1}{1}a^{1-1}b^1$ që është e saktë. Supozojmë tani që $n \in E$. Pra kemi $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$. Atëherë do kemi:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) \underbrace{=}_{n\in E} \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right)(a+b) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} =$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1-0}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + \binom{n}{n}a^{n-n}b^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1-0}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n+1-(k+1)}b^{k+1} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1-(n+1)}b^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1-0}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1-(n+1)}b^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1-0}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)a^{n+1-k}b^k + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1-(n+1)}b^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1-0}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1-(n+1)}b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k.$$

Pra vërtetuam që $n+1 \in E$ dhe kështu në bazë të principit të induksionit matematik do kemi $E = \mathbb{N}$.

Shënim. Kemi shfrytëzuar barazimin $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ i cili vlen për çdo $n, k \in \mathbb{N}$ sepse

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

2.

(a) $3\binom{x}{6} = 4\binom{x-1}{5} \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 4 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} \Leftrightarrow \frac{3x}{6} = 4 \Leftrightarrow x = 8.$

(b) Meqënëse tek ekuacioni figuron koeficienti i binomit $\binom{4}{x}$ kemi që $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Për $x = 1$ kemi $\frac{1}{\binom{4}{1}} - \frac{1}{\binom{5}{1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \neq \frac{1}{6} = \frac{1}{\binom{6}{1}}$.
Për $x = 2$ kemi $\frac{1}{\binom{4}{2}} - \frac{1}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15} = \frac{1}{\binom{6}{2}}$.
Për $x = 3$ kemi $\frac{1}{\binom{4}{3}} - \frac{1}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20} \neq \frac{1}{20} = \frac{1}{\binom{6}{3}}$.
Për $x = 4$ kemi $\frac{1}{\binom{4}{4}} - \frac{1}{\binom{5}{4}} = \frac{1}{1} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \neq \frac{1}{15} = \frac{1}{\binom{6}{4}}$.
Kështu vërejmë që zgjidhja e vetme e ekuacionit të dhënë është $x = 2$.

(c) $35\binom{2n}{n-1} = 132\binom{2(n-1)}{n} \Leftrightarrow 35 \cdot \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = 132 \cdot \frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!} \Leftrightarrow 35 \cdot \frac{(2n-2)!(2n-1)2n}{(n-2)!(n-1)n!(n+1)} = 132 \cdot \frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!} =$

$= \frac{70n(2n-1)}{(n-1)(n+1)} = 132 \Leftrightarrow 140n^2 - 70n = 132n^2 - 132 \Leftrightarrow 8n^2 - 70n + 132 = 0 \Leftrightarrow 4n^2 - 35n + 66 = 0.$
Nga këtu kemi $n_{1/2} = \frac{35\pm\sqrt{35^2-4\cdot4\cdot35}}{2\cdot4} = \frac{35\pm\sqrt{169}}{8} = \frac{35\pm13}{8}$. Rrjedh që $n_1 = 6$ dhe $n_2 = \frac{22}{8}$. Meqënese $n \in \mathbb{N}$, zgjidhja e vetme e ekuacionit do jetë $n = 6$.

3.

(a) $\binom{x}{x-2}+2\binom{x-1}{3}=7(x-1)\Leftrightarrow \frac{x!}{(x-2)!\cdot 2!}+2\cdot\frac{(x-1)!}{(x-4)!\cdot 3!}=7(x-1)\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{2}+2\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}=7(x-1)=$
$\Leftrightarrow \frac{x}{2}+\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{3}=7\Leftrightarrow 3x+2(x^2-5x+6)=42\Leftrightarrow 2x^2-7x-30=0.$

Nga këtu kemi $x_{1/2}=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 2\cdot(-30)}}{2\cdot 2}=\frac{7\pm\sqrt{289}}{4}=\frac{7\pm 17}{4}$. Rrjedh që $x_1=6$ dhe $x_2=\frac{-10}{4}$. Meqënese $x\in\mathbb{N}$, zgjidhja e vetme e ekuacionit do jetë $x=6$.

(b) $\binom{x+3}{x+1}-5\binom{3x}{2}=6-19x^2\Leftrightarrow \frac{(x+3)!}{(x+1)!2!}-5\cdot\frac{3x(3x-1)}{2!}=6-19x^2\Leftrightarrow \frac{(x+3)(x+2)}{2}-\frac{15x(3x-1)}{2}=6-19x^2$
$\Leftrightarrow x^2+5x+6-45x^2+15x=12-38x^2\Leftrightarrow 6x^2-20x+6=0\Leftrightarrow 3x^2-10x+3=0.$

Nga këtu kemi $x_{1/2}=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 3\cdot 3}}{2\cdot 3}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{10\pm 8}{6}$. Rrjedh që $x_1=3$ dhe $x_2=\frac{-2}{6}$. Meqënese $x\in\mathbb{N}$, zgjidhja e vetme e ekuacionit do jetë $x=3$.

(c) $\binom{x+3}{x+1}=\binom{x+1}{x-1}+\binom{x}{x-2}\Leftrightarrow \frac{(x+3)!}{(x+1)!2!}=\frac{(x+1)!}{(x-1)!2!}+\frac{x!}{(x-2)!2!}\Leftrightarrow \frac{(x+3)(x+2)(x+1)!}{(x+1)!}=\frac{(x+1)x(x-1)!}{(x-1)!}+\frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!}$
$\Leftrightarrow (x+3)(x+2)=(x+1)x+x(x-1)\Leftrightarrow x^2+5x+6=x^2+x+x^2-x\Leftrightarrow x^2-5x-6=0$

Nga këtu kemi $x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{5\pm 7}{2}$. Rrjedh që $x_1=6$ dhe $x_2=-1$. Meqënese $x\in\mathbb{N}$, zgjidhja e vetme e ekuacionit do jetë $x=6$.

4. Nga relacioni i zbërthimit $(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{k}x^k+\cdots+\binom{n}{n}x^n$, kemi që koeficienti i binomit $(1+x)^n$ që shumëzon x^5 është $\binom{n}{5}$ ndërsa koeficienti që shumëzon x^{12} është $\binom{n}{12}$. Nga kushti i ushtrimit kemi $\binom{n}{5}=\binom{n}{12}$.

$$\binom{n}{5}=\binom{n}{12}\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)}{12!}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)=6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12$$

$$\Leftrightarrow (n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)=(17-5)\cdot(17-6)\cdot(17-7)\cdot(17-8)\cdot(17-9)\cdot(17-10)\cdot(17-11)$$

Vërejme se $n=17$ është një zgjidhje dhe meqënëse funksioni

$$n\to(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)$$

është rreptësisht rritës (pra edhe injektiv), kemi që $n=17$ është edhe e vetmja zgjidhje e ushtrimit.

5. Nga relacioni i zbërthimit $(a^3+b^3)^n=\binom{n}{0}(a^3)^n+\binom{n}{1}(a^3)^{n-1}b^3+\cdots+\binom{n}{k}(a^3)^{n-k}(b^3)^k+\cdots+\binom{n}{n}(b^3)^n$, kemi që koeficienti i binomit $(a^3+b^3)^n$ i anëtarit të tretë është $\binom{n}{2}$. Duhet të jetë $\binom{n}{2=28}$ ose $n(n-1)=56$, pra $n(n-1)=8\cdot 7$. Vërejme se $n=8$ është një zgjidhje dhe meqënëse funksioni

$$n\to n(n-1)$$

është rreptësisht rritës (pra edhe injektiv), kemi që $n=8$ është i vetmi rast i mundur. Tani kemi zbërthimin për binomin $(a^3+b^3)^8$:

$$\binom{8}{0}(a^3)^8+\binom{8}{1}(a^3)^7b^3+\binom{8}{2}(a^3)^6(b^3)^2+\binom{8}{3}(a^3)^5(b^3)^3+\underbrace{\binom{8}{4}(a^3)^4(b^3)^4}_{\text{anëtari i mesëm}}+\binom{8}{5}(a^3)^3(b^3)^5+\binom{8}{6}(a^3)^2(b^3)^6+\binom{8}{7}(a^3)(b^3)^7+\binom{8}{8}(b^3)^8$$

Kështu kemi që anëtari i mesëm i zbërthimit është $\binom{8}{4}(a^3)^4(b^3)^4=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot a^{12}b^{12}=70a^{12}b^{12}$.